

به نام خالق یکتا  
دانشگاه صنعتی اصفهان - دانشکده علوم ریاضی

آزمون میان‌ترم درس محاسبات عددی      فروردین ماه ۹۱      مدت ۷۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی ..... شماره‌ی دانشجویی ..... مدرس .....

توجه: این دفترچه شامل پرسش‌ها، پاسخ‌نامه و یک برگه‌ی سفید (پیش‌نویس) است که به هیچ وجه نباید جدا شوند.  
پاسخ مناسب پرسش‌ها را فقط با علامت  $\times$  در پاسخ‌نامه مشخص کنید.  
پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد. از انتخاب دو گزینه برای یک پرسش و خط زدن خودداری کنید.  
همراه داشتن تلفن همراه تخلف امتحانی محسوب می‌شود.

(۱) حداقل چند جمله از بسط مک‌لورن تابع  $f(x) = \sin(x)$  لازم است تا  $f(x)$  با دقت  $4D$  مشخص شود؟  
الف) ۲      ب) ۶      ج) ۴      د) ۸

(۲) اگر خطای نسبی  $x$  برابر  $0.04$  و خطای نسبی  $y$  برابر  $0.06$  باشد، خطای نسبی  $z = 2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}$  کدام است؟  
الف)  $0.01$       ب)  $0.04$       ج)  $0.02$       د)  $0.03$

(۳) برای تابع  $f(x) = \sin(x) + 0.5x + 0.3$  روی بازه‌ی  $[0.5, 1]$  بعد از ۲ گام به روش نصف کردن، بازه‌ی حاوی جواب کدام است؟  
الف)  $[0.7, 0.75]$       ب)  $[0.5, 0.625]$       ج)  $[0.625, 0.75]$       د)  $[0.5, 0.75]$

(۴) گردشده‌ی عدد  $2/89049$  به ترتیب با دقت  $4S$  و  $4D$  کدام گزینه است؟  
الف)  $2/890$  و  $2/8905$       ب)  $2/89$  و  $2/8905$       ج)  $2/89$  و  $2/8905$       د)  $2/890$  و  $2/8905$

(۵) به روش تکرار ساده برای محاسبه‌ی نقطه‌ی ثابت تابع  $g(x) = \frac{\pi}{2} + \sin(\frac{1}{2}x)$ ، با  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ، بعد از  $10^{\circ}$  مرحله، جواب دارای چه دقتی است؟  
الف)  $5D$       ب)  $4D$       ج)  $3D$       د)  $2D$

(۶) فرض کنید  $f(x) = x^2 - 0.5x + 1$ ،  $x_0 = -1$  و  $x_1 = -2$ . مقدار  $x_2$  به روش وتری کدام است؟  
الف)  $-1/1654$       ب)  $-1/0769$       ج)  $-1/0190$       د)  $-1/1595$

(۷) برای محاسبه‌ی ریشه‌ی  $f(x) = x^2 - 5x$  به روش نیوتن-رفسون، با فرض  $x_0 = 2$ ، مقدار  $x_2$  کدام است؟  
الف)  $2/23607$       ب)  $2/23669$       ج)  $2/23612$       د)  $2/23764$

(۸) فرض کنید  $a = 0.0523$  و  $b = 0.00456$ . اگر محاسبات در سیستم  $3s$  (با گرد کردن) انجام گیرد، برای  $x = a^2 - b^2$  و  $y = (a-b)(a+b)$  مقدار  $|x-y|$  کدام گزینه است؟  
الف)  $0$       ب)  $5 \times 10^{-7}$       ج)  $6 \times 10^{-8}$       د)  $2 \times 10^{-6}$

(۹) روش نیوتن-رفسون برای محاسبه‌ی ریشه‌ی  $ax^2 - x = 0$  به کدام رابطه‌ی بازگشتی منجر می‌شود؟  
الف)  $x_k = \frac{2x_{k-1}}{2ax_{k-1} - 1}$       ب)  $x_k = ax_{k-1}^2$       ج)  $x_k = \frac{ax_{k-1}^2}{2ax_{k-1} - 1}$       د)  $x_k = \frac{3ax_{k-1}^2}{2ax_{k-1} - 1}$

۱۰) با فرض این که دنباله‌ی بازگشتی  $x_k = x_{k-1}(2 - ax_{k-1})$  برای عدد ثابت  $a \neq 0$  به  $\frac{1}{a}$  همگرا است. برای خطای مرحله  $k$ ام

یعنی  $e_k = |x_k - \frac{1}{a}|$  کدام گزینه صحیح است؟

الف)  $e_k = |a|e_{k-1}$  (الف)      ب)  $e_k = |a|e_{k-1}^2$  (ب)      ج)  $e_k = |\frac{1}{a}|e_{k-1}^2$  (ج)      د)  $e_k = |\frac{1}{a}|e_{k-1}$  (د)

۱۱) کدام گزینه صحیح است؟

- الف) مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن بزرگتر از مرتبه‌ی همگرایی روش وتری در محاسبه ریشه‌های ساده است.  
 ب) همگرایی روش وتری تضمین شده است.  
 ج) روش نصف کردن را می‌توان برای تعیین ریشه‌های مضاعف هم به کار برد.  
 د) همگرایی روش نیوتن-رفسون تضمین شده است.

۱۲) برای حل دستگاه معادلات خطی زیر به روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی وزنی در مرحله‌ی اول، سطر اول با کدام سطر باید جابجا شود؟

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 20x_4 = 1/9 \\ 0/4x_1 - x_2 + x_3 - 1/2x_4 = -9 \\ x_1 + 2x_2 - 0/7x_3 + x_4 = 2 \\ 0/2x_1 + 0/2x_2 + 0/8x_3 + 0/3x_4 = 9 \end{cases}$$

- الف) سطر دوم (الف) سطر سوم (ب) سطر سوم (ج) سطر چهارم (د) نیاز به جابجایی سطرها نیست.

۱۳) در تجزیه‌ی  $LU$  ماتریس  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  ماتریس  $L$  کدام است؟

الف)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  (الف)      ب)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & -0/5 & 1 \end{pmatrix}$  (ب)  
 ج)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0/125 & 1 \end{pmatrix}$  (ج)      د)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & -0/25 & 1 \end{pmatrix}$  (د)

۱۴) برای محاسبه‌ی ریشه‌ی  $f(x) = 0$  روی  $[1, 2]$  به روش نصف کردن بعد از ۱۲ گام جواب دارای چه دقتی است؟

- الف)  $2D$  (الف)      ب)  $3D$  (ب)      ج)  $4D$  (ج)      د)  $5D$  (د)

### پاسخ نامه

د	ج	ب	الف	-	د	ج	ب	الف	-	د	ج	ب	الف	-
				۱۱					۶					۱
				۱۲					۷					۲
				۱۳					۸					۳
				۱۴					۹					۴
				-					۱۰					۵

### موفق باشید

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

$$z = z(x_1, \dots, x_n), \quad \Delta z \approx \left| \frac{\partial z}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \Delta x_n \right|,$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad \text{Max}|g'(x)| < q \text{ و } \alpha \text{ نقطه ثابت } g \text{ است}$$