

## حل مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ - ترم اول ۹۳-۹۲

سؤال ۰۱ الف) نشان دهید که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  که در آن  $e$  عدد نپر است یک سری همگرا است و مقدار آن را تعیین کنید.  
ب) همگرایی یا واگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$  را بررسی کنید.

---

حل. الف) سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  یک سری هندسی با قدر نسبت  $\frac{1}{e}$  است. بنابراین دنباله مجموع جزئی این سری، عبارتست از

$$s_n = \frac{1/e(1 - (1/e)^n)}{1 - 1/e}.$$

چون داریم  $1/e < 1$ ، بنابراین دنباله فوق و در نتیجه سری همگرا است و مقدار حد برابر  $\frac{1}{e-1} = \frac{1/e}{1-1/e}$  است. (۱۰ نمره)

ب) با توجه به مثبت بودن جملات سری، می‌توان از آزمون مقایسه استفاده کرد. داریم

$$0 < \frac{1}{\cosh n} = \frac{2}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{2}{e^n}.$$

از طرف دیگر طبق قسمت الف، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$  همگراست. بنابراین طبق آزمون مقایسه، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n}$  نیز همگرا است. (۱۰ نمره)

سؤال ۲. الف) فرض کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  یک سری همگرای مطلق و دنباله‌ای همگرا به عدد  $\ell \neq 0$  باشد و برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $b_n \neq 0$ .

الف) نشان دهید که عدد  $N \in \mathbb{N}$  وجود دارد که برای هر  $n \geq N$ ،  $\frac{|\ell|}{2} < |b_n| < \frac{3|\ell|}{2}$ .

ب) نشان دهید که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  همگرای مطلق است.

حل. الف) با استفاده از فرض  $\ell = \lim_n b_n$  و استفاده از تعریف حد یک دنباله، برای  $\epsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$  عدد  $N \in \mathbb{N}$  وجود دارد که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |b_n - \ell| < \epsilon$$

با توجه به اینکه  $||b_n| - |\ell|| \leq |b_n - \ell|$ ، خواهیم داشت

$$\forall n \geq N, \quad ||b_n| - |\ell|| \leq |b_n - \ell| < \epsilon = \frac{|\ell|}{2}$$

و از آنجا

$$-\frac{|\ell|}{2} < |b_n| - |\ell| < \frac{|\ell|}{2}$$

که از آن نامساوی مورد نظر به دست می‌آید. (۵ نمره)

ب) (راه اول) بنا به فرض، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  همگرا است. با استفاده از آزمون مقایسه حدی برای دو سری  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$$

خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{a_n}{b_n} \right|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|\ell|}$$

که عددی حقیقی و غیر صفر است. بنابر آزمون مقایسه حدی، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$  همگرا و در نتیجه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  همگرای مطلق است.

(راه دوم) با استفاده از قسمت الف)، عدد  $N \in \mathbb{N}$  وجود دارد که برای هر  $n \geq N$ ،  $\frac{|\ell|}{2} < |b_n|$  و یا  $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|\ell|}$ . در نتیجه

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{2}{|\ell|} |a_n|$$

با توجه به همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  و در نتیجه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|\ell|} |a_n|$  و با استفاده از آزمون مقایسه، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$  نیز همگراست.

در نتیجه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  همگرای مطلق است. (۱۰ نمره)

سؤال ۳. الف) نشان دهید که تابع  $f$  با ضابطه زیر بر  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

ب) نشان دهید که عدد حقیقی  $c > 0$  وجود دارد که  $e^c = 1 + c + c^2$ .

حل. الف) با توجه به پیوستگی تابع نمایی و هر تابع چندجمله‌ای، تابع  $g_1$  با ضابطه  $g_1(x) = e^x - (x + 1)$  بر سراسر  $\mathbb{R}$  پیوسته است. در نتیجه تابع با ضابطه  $\frac{e^x - (x + 1)}{x^2}$  در هر نقطه که ریشه مخرج نباشد پیوسته خواهد بود. پس  $f$  بر  $\mathbb{R} - \{0\}$  پیوسته است. (۷ نمره)

اکنون پیوستگی در  $x = 0$  را ثابت می‌کنیم. برای  $x \neq 0$  با شرط  $|x| < 1$  داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right| \\ &= |x| \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{n!} \right| \\ &\leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-3}}{n!} < |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = |x| \left( e - \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - \frac{1}{2}| = 0$  و از آنجا  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$ ، یعنی  $f$  در این نقطه نیز پیوسته است. (۸ نمره)

ب) (راه اول) با استفاده از تابع  $f$  در قسمت الف)،

$$f(0) = \frac{1}{2} < 1 < f(3) = \frac{e^3 - 4}{9}$$

با توجه به پیوستگی  $f$  بر بازه  $[0, 3]$  و با استفاده از قضیه مقادیر میانی،  $c \in (0, 3)$  (و در نتیجه  $c > 0$ ) وجود دارد که  $f(c) = 1$  و از آنجا  $1 = \frac{e^c - 1 - c}{c^2}$  و یا  $e^c = 1 + c + c^2$ .

(راه دوم) تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = e^x - 1 - x - x^2$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته است. داریم

$$g(1) = e - 3 < 0 \quad \text{و} \quad g(3) = e^3 - 13 > 0$$

با توجه به پیوستگی  $g$  بر  $[1, 3]$  و اینکه  $g(1)g(3) < 0$ ، بنابر قضیه بولتسانو،  $c \in (1, 3)$  وجود دارد که

$$g(c) = e^c - 1 - c - c^2 = 0 \quad (10 \text{ نمره})$$