پاسخ مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲– فروردین ۹۲

۱– تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مطلوبست تعیین مشتق سویی تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.

ج) نشان دهید که f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

د) مطلوبست تعیین معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(1,0,0)$.

حل.

الف) باید نشان دهیم که برای $\epsilon>0$ عدد $\delta>0$ وجود دارد که

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \sqrt{x^2+y^2}<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$$

با توجه به اینکه

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|xy^2-y^3|}{x^2+y^2}\leq\frac{y^2}{x^2+y^2}|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}|y|\leq|x|+|y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

برای داشتن $|f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$، کافی است $2\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon$. برای این منظور $\delta>0$ را کوچکتر یا مساوی $\frac{\epsilon}{2}$ انتخاب می‌کنیم. (۵ نمره)

ب) با توجه به تعریف مشتق سویی

$$D_uf(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3ab^2-t^3b^3}{t^2a^2+t^2b^2}-0}{t}=\frac{ab^2-b^3}{a^2+b^2}=ab^2-b^3$$

(۵ نمره)

ج) اگر f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$. عبارت $D_uf(0,0)$ را در قسمت قبل حساب کردیم. اکنون به محاسبه‌ی $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$ می‌پردازیم. بنابر قسمت قبل، با انتخاب $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=D_if(0,0)=0\qquad,\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=D_jf(0,0)=-1$$

در نتیجه $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}=-b$. با توجه به اینکه تساوی $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$ برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ لزوما برقرار نیست $\Big($به طور مثال، برای $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{j}$، داریم $D_uf(0,0)=0\neq-\frac{1}{\sqrt2}=\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}\Big)$ پس f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

(راه حل دوم: استفاده از تعریف مشتق‌پذیری) (۵ نمره)

د) با معرفی تابع سه متغیره‌ی g با ضابطه‌ی $g(x,y,z)=f(x,y)-z$، رویه‌ی S رویه‌ی تراز تابع g به ازای ثابت صفر بوده، بردار $\nabla g(۱,۰,۰)$ بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر این رویه در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ خواهد بود. با توجه به اینکه

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^۴-x^۲y^۲+۲xy^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۲xy^۳-۳x^۲y^۲-y^۴}{(x^۲+y^۲)^۲}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}=-۱$$

داریم $\nabla g(۱,۰,۰)=-\mathbf{k}$. به این ترتیب، صفحه‌ی مماس بر S در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ دارای معادله‌ی $-z=۰$ یا $z=۰$ بوده، که همان صفحه‌ی xoy است. (۵ نمره)

۲− فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. اگر $g:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y)=f(x+y,x^۲-y)$ داده شده باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم f.

حل. با قرار دادن $u(x,y)=x+y$ و $v(x,y)=x^۲-y$، خواهیم داشت $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$. با توجه به شرایط داده شده می‌توانیم از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده کنیم.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))+۲x\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$$

(۳ نمره)

به این ترتیب، با استفاده مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\\&=(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y})+۲x(\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\frac{\partial v}{\partial y})\\&=\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}-\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}+۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}-۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\\&=\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}+(۲x-۱)\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}-۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\end{aligned}$$

(۵ نمره)

۳— تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = xye^{-(x+y)}$ مفروض است. اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی f را در صورت وجود مشخص کنید.

حل. ابتدا نقاط بحرانی f را بر $\mathbb{R}^2$ به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه f تابعی مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی این تابع جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ خواهند بود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-(x+y)} - xye^{(x+y)} = y(1-x)e^{-(x+y)} = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-(x+y)} - xye^{(x+y)} = x(1-y)e^{-(x+y)} = 0 \qquad (2)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱)، داریم $y = 0$ یا $x = 1$. در حالت $y = 0$ با استفاده از معادله‌ی (۲) خواهیم داشت $x = 0$. به همین ترتیب، اگر $x = 1$آنگاه با استفاده از (۲)، $y = 1$. پس f بر $\mathbb{R}^2$ دارای دو نقطه‌ی بحرانی $P_1 = (0,0)$ و $P_2 = (1,1)$ است. (۴ نمره)

اکنون برای ادامه‌ی مسئله از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -ye^{-(x+y)} - y(1-x)e^{-(x+y)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1-x)e^{-(x+y)} - y(1-x)e^{-(x+y)}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -xe^{-(x+y)} - x(1-y)e^{-(x+y)}$$

در نتیجه

$$A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \quad , \quad B_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \quad , \quad C_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$$D_1 = A_1C_1 - B_1^2 = -1 < 0$$

پس P_1 یک نقطه‌ی زینی برای f است. به همین ترتیب،

$$A_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -e^{-2} \quad , \quad B_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 0 \quad , \quad C_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -e^{-2}$$

$$D_2 = A_2C_2 - B_2^2 = e^{-4} > 0$$

با توجه به اینکه $A_2 < 0$، نقطه‌ی P_2 نظیر ماکزیمم نسبی تابع f است. (۸ نمره)