



به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

۱. الف) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$$

(۲ نمره)

$$a_n = n \tan \frac{1}{n} = \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

(۳ نمره)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

(۱ نمره)

بنابراین، طبق آزمون جمله عمومی، سری واگراست.

ب) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$$

(۳ نمره)

$a_n = \frac{\tanh n}{n^2}$  چون  $n > 0$  داریم  $0 < \tanh n \leq 1$  لذا  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$

(۲ نمره)

میدانیم که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  طبق دستور سری فوق همساز همگراست.

(۲ نمره)

در نتیجه طبق آزمون مقایسه سری همگراست.

ج) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ne^n}$$

(۱ نمره)

$$a_n = \frac{1}{ne^n} > 0$$

(۳ نمره)

چون  $ne^n$  صعودی است پس  $\frac{1}{ne^n}$  نزولی است.

(۱ نمره)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ne^n} = 0$$

(۲ نمره)

در نتیجه طبق آزمون سری متناوب (لایپ نیتس) سری همگراست.

۲. الف) برای  $x > 0$  داریم  $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$  از پیوستگی توابع  $x$ ،  $\ln x$  و  $e^x$  و با توجه به اینکه  $x > 0$  بنا بر قضایای پیوستگی، نتیجه میشود  $\frac{\ln x}{x}$  و  $e^{\frac{\ln x}{x}}$  پیوسته هستند. (۳ نمره)

به همین ترتیب برای  $x < 0$  و از پیوستگی توابع  $x^2$  و  $\sinh x$  نتیجه میشود  $f(x) = \sinh x^2$  پیوسته است. (۳ نمره)

از سوی دیگر

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$$

زیرا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  حال اگر  $x_n \rightarrow 0$  و  $x_n > 0$ ، آنگاه  $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$  و  $\ln x_n \rightarrow -\infty$  در نتیجه  $e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} \rightarrow 0$  پس  $\frac{\ln x_n}{x_n} \rightarrow -\infty$  (۴ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sinh x^2 = \sinh(\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2) = \sinh 0 = 0$$

زیرا  $\sinh x$  در  $x = 0$  پیوسته است.

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

پس  $f$  در صفر نیز پیوسته است. (۴ نمره)

ب) بنا بر الف) تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}$  بر  $(0, +\infty)$  پیوسته است. (۲ نمره)

$f(1) = 1 - \frac{1}{1} > 0$  (۱ نمره)

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{\frac{1}{2}} < 0$  (۱ نمره)

پس بنا بر قضیه بولترانو عدد  $c \in (\frac{1}{2}, 1)$  وجود دارد که  $f(c) = 0$  یعنی  $c^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c}$  (۲ نمره)

$$f'_+(\circ) = \lim_{h \rightarrow \circ^+} \frac{f(\circ + h) - f(\circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ^+} \frac{h^{\frac{3}{2}} \ln h}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ^+} h^{\frac{1}{2}} \ln h = \circ$$

(۶ نمره) بنا بر مثال حل شده کتاب برای  $r > \circ$ ،  $\lim_{x \rightarrow \circ^+} x^r \ln x = \circ$

$$f'_-(\circ) = \lim_{h \rightarrow \circ^-} \frac{f(\circ + h) - f(\circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ^-} \frac{h^{23h}}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ^-} h^{23h} = \circ \times 1 = \circ$$

(۶ نمره) در نتیجه  $f'_+(\circ) = f'_-(\circ) = \circ$  یعنی  $f$  در صفر مشتق پذیر است و  $f'(\circ) = \circ$ .  
 ب) برای  $x > \circ$  داریم  $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \ln x$ . پس از مشتق پذیری  $\ln x$  و  $x^{\frac{3}{2}}$  نتیجه میگیریم  $f$  مشتق پذیر است. به همین ترتیب از مشتق پذیری  $3^x$  و  $x^2$  نتیجه میگیریم برای  $x < \circ$  تابع  $f$  مشتق پذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \ln x + x^{\frac{1}{2}} & x > \circ \\ 2x^{3^x} + x^2 \ln 3^{3^x} & x \leq \circ \end{cases}$$

(۸ نمره)