مسأله

مسائل سرچشمهٔ وجود و پویائی ریاضیات هستند، اما قضایا هرچقدر هم پراهمیت باشند لاجرم روزگاری خود مسائلی پرجذبه به شمار رفته‌اند. پیشرفتها و تحولات عمده را در ریاضیات مسائل سبب گشته‌اند، که مسائل مشهور هیلبرت در همین قرن خود بهترین شاهد است. بدین خاطر از این شماره صفحاتی از پیک ریاضی را به مسائل و حلهای آن اختصاص می‌دهیم. مسائل مورد نظر در سطح پژوهشی نخواهند بود، چه از این نوع هرکس برای خود چندتایی دارد و یا بفراوانی در ادبیات ریاضی پیدا خواهد کرد. این مسألهٔ معروف سیلوستر را ملاحظه کنید:

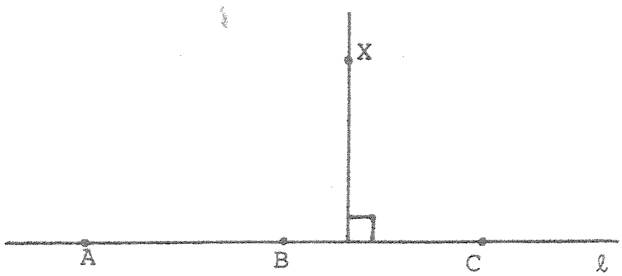
مسألهٔ شمارهٔ صفر. فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی از نقاط در صفحه باشد که بر هر خط که از دو نقطهٔ آن بگذرد نقطهٔ دیگری از S قرار داشته باشد. ثابت کنید نقاط S همگی بر یک خط راست قرار دارند.

وبیشتر از آنکه حل آن را در همین صفحه ببینید، لحظاتی را با آن کلنجار بروید. شاید شما حلی از آن بیابید که زیباتر یا ظریفتر، یا کوتاهتر و یا شگفت انگیزتر از حل داده شده باشد. در این صورت حل خود را برای ما بفرستید تا همگی از آن لذت ببرند. از شما می‌خواهیم اگر مسأله ای سراغ دارید که حل آنها به نحوی بارز و ممتاز است، آن را همراه با حل به پیک ریاضی بفرستید. حل مسائل مطرح شده را بترتیب درج در شماره‌های بعد انتشار خواهیم داد.

مسأله (سیلوستر)

فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی از نقاط در صفحه باشد که روی هر خط که از دو نقطهٔ آن بگذرد نقطهٔ دیگری از S قرار داشته باشد. ثابت کنید نقاط S روی یک خط راست قرار دارند.

حل .



فرض کنیم چنین نباشد و L مجموعهٔ همهٔ خطوطی باشد که با زوجهایی از نقاط S مشخص می‌شوند. در این صورت بعضی از نقاط S روی بعضی از خطوط L قرار ندارند، و $X \varepsilon S$ و $\ell \varepsilon L$ را چنان انتخاب می‌کنیم که X روی ℓ قرار نداشته باشد و فاصلهٔ X از ℓ کمترین مقدار را داشته باشد. (در اینجا از متناهی بودن S استفاده می‌شود) روی خط ℓ سه نقطهٔ S، مثلاً A و B و C قرار دارند. در این صورت دوتای آن در یک طرف پای عمود از X بر ℓ قرار دارند. (مثلاً در شکل ما این دو نقطه A و B هستند. درصورتی که یکی از این سه نقطه پای عمود باشد، آن را یکی از این دو نقطه در نظر می‌گیریم.) در این صورت فاصلهٔ B از خط AX کمتر از فاصلهٔ X از ℓ است؛ که تناقض است.

The Mathematical Intelligencer

Vol.5 No.2 1983

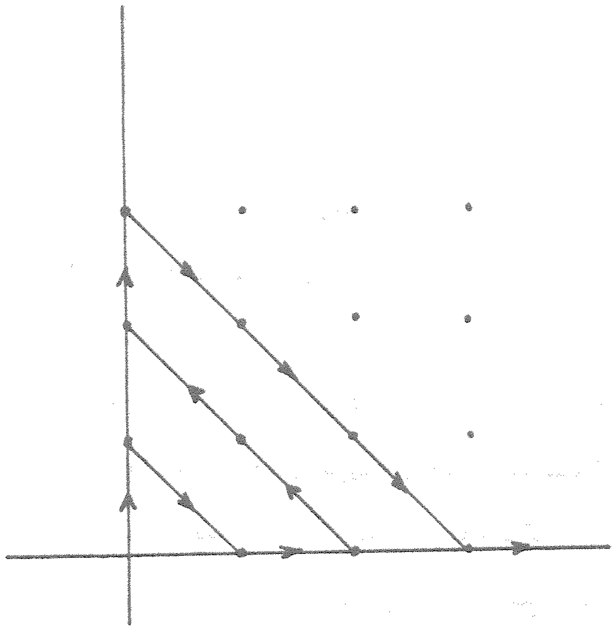
تابع زوج سازی و وارون آن

فرخ وطن

اولین تجربهٔ هرکسی که با نظریهٔ (کانتوری) مجموعه‌ها آشنا می‌شود، این است که هر مجموعهٔ نامتناهی با بعضی از زیرمجموعه‌های خود همعدد است، یعنی بین آنها تناظری دوسویی (یک به یک و پوشا) وجود دارد. یکی از مثالهای ساده برای این امر، همعدد بودن

$$IN =\{ 0,1,2,\ldots\}$$

با IN^2 است. اثبات آن خیلی ساده است و یکی از اولین مثالهای روش استاندهٔ شمارش قطری است:



از این روش همچنین برای اثبات شمارش‌پذیربودن مجموعهٔ اعدادگویا استفاده می‌شود. هرچندکانتوراهمیت وقدرت این روش رانشان دادو آن رامتداول کرد، اما، سالها پیش ازاو، کوشی برای اولین بار برای تبدیل سری مضاعف $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ به‌یک سری معمولی ازآن استفاده کرد. البته، کارکانتوربنیادی‌تربود، زیراوی ثابت کردکه بسجملهٔ (چندجمله‌ای) درجهٔ دوم

$$J\ (x,y) = \frac{1}{2}\ (\ (x+y)^2 + 3x+y)$$

تابع دوسویی موردنظربین IN^2 و IN است. واضح است که $J(y,x)$ نیزهمین

ویژگی را دارد. سؤالی که طبعاً پیش می‌آید این است که آیا بسجمله‌ٔ درجه‌ٔ دوم دیگری، به غیر از این دو، این ویژگی را دارد؟ یا به طور کلیتر، به ازای هر n، آیا

(*) یک بسجمله‌ٔ درجه‌ٔ n وجود دارد که تناظری دوسویی بین IN^2 و IN برقرار می‌کند.

در ۱۹۲۳، فیوتر و پولیا به سؤال (*)، به ازای $n = ۲$، پاسخ منفی دادند. آنان با استفاده از مانده‌های سریهای فوریه ثابت کردند که $J(x,y)$ و $J(y,x)$ تنها بسجمله‌های درجه‌ٔ دوم با ویژگی فوق هستند.

در ۱۹۷۸، لو و روزنبرگ ثابت کردند که پاسخ (*) به ازای ۱، ۳، و ۴ منفی است: هیچ بسجمله‌ٔ درجه‌ٔ یک، سه یا چهار نمی‌تواند تناظری دوسویی بین IN^2 و IN برقرار کند. آنان همچنین ثابت کردند رده‌ٔ بزرگی از بسجمله‌های درجه‌های بالاتر نمی‌تواند پاسخ مثبتی به (*) دهد. این نتایج به فرمولبندی حدس زیر منجر شد:

حدس. بسجمله‌های کانتور تنها بسجمله‌هایی هستند که تناظری دوسویی بین IN^2 و IN برقرار می‌کنند.

بلافاصله باید اضافه کنیم این حدس در بعدهای بالاتر درست نیست. به ازای m برابر ۳، ۴، و ۵، به ترتیب ۲، ۱۱، و ۴۵ بسجمله‌ٔ متفاوت (بدون در

نظرگرفتن بسجمله هایی که با جابجا کردن متغیرها ازیکدیگر به دست می‌آیند) به دست آمده است که بین IN^m و IN تناظری دوسویی برقرار می‌کنند.

صورتهای تعمیم‌یافتهٔ این مسألهٔ نیز حل نشده مانده‌اند. مثلاً" هنوز ثابت نشده است که بسجمله‌ای وجود دارد که Z^2 را بروی IN بنگارد (یعنی پوشا باشد). البته، به ازای $m > ۳$، بسجمله‌ای وجود دارد که Z^m را بروی IN بنگارد، زیرا بنا بر قضیهٔ لژاندر ـ گاوس هرعدد طبیعی مجموع سه عدد مثلثی است؛ و به ازای $m = ۱$ نیز بوضوع مسأله جواب ندارد.

همچنین، مسألهٔ جالب توجه دیگر در این زمینه از این قرار است. بسجمله‌ای مانند $P(x,y)$ بیابید که در IN^2

(یک) $P(0,y)=P(x,0)=0$,

(دو) P در بقیهٔ نقاط (یعنی نقاطی که روی محورها نیستند) یک به یک باشد و مقدار صفر را اختیار نکند.

البته چنین بسجمله‌ای وجود دارد. با استفاده از آن، در ۱۹۷۸، بولمن ولاپلاز ثابت کردند که هیچ روش کلی (آلگوریتم) وجود ندارد که با آن بتوان از روی ضرایب یک بسجملهٔ n متغیری تعیین کرد که یک به یک هست یا نه. وجود یا عدم وجود آلگوریتمی برای تعیین دوسویی بودن یک بسجمله از روی ضرایب آن هنوز حل نشده مانده است.

باید اضافه کنیم که بررسی توابع زوج سازی (هرتابع دوسویی از IN^m در IN یک تابع زوج سازی می‌نامند) صرفاً "برای اهمیت فی نفسهٔ آنها نیست. در نظریهٔ توابع بازگشتی و محاسبه‌پذیری، از این توابع برای رمزگذاری

توابع وروابط بسیار زیاد استفاده می‌شود. همچنین درتکنیکهای برنامه نویسی برای بانکهای داده‌ها، می‌توان آنها را به کار گرفت.

گذشته از مسائل حل نشدهٔ فوق، که حل آنها در حد مقاله‌های سطح بالای پژوهشی است، چند مسألهٔ ساده (و حتی ابتدایی) دربارهٔ توابع زوج سازی وجود دارد که شاید برای خوانندگان تلاش برای حل آنها ذوق آزمایی جالبی باشد.

مسألهٔ اول. اثباتی کوتاه، فشرده، وزیبا برای دوسویی بودن بسجملهٔ کانتور $J(x,y)$ بیابید. منظور اثباتی است که در آن از تکنیکهای "دبیرستانی" دوسویی بودن توابع استفاده نشده باشد. (در این مورد این تکنیک بسیار کسل کننده است. می‌توانید امتحان کنید)

مسألهٔ دوم. چون بسجملهٔ کانتور $J(x,y)$ دوسویی است، توابع k و L از IN در IN وجود دارند که زوج (k,L) وارون J است، یعنی به ازای همهٔ اعداد طبیعی x و y داریم

$$K\,(J\,(x,y)) = x,$$

$$L\,(J\,(x,y))=y,$$

$$J\,(K(x),k(y))=(x,y).$$

فرمولهایی برای بیان مقادیر K و L بیابید. (توجه: توابع K و L بسجمله نیستند.)

مسألهٔ سوم. بسجمله‌ٔ $P(x,y)$ را بیابیدکه درقضیهٔ بولمن ـ لاپلازا به‌کار می‌آید (یعنی خواص (یک) و (دو) را داشته‌باشد.) جواب این مسأله یکتا نیست.

منابع

1. D.Bollman and M.Laplaza, Some decislon problems for polynomial mappings, *Theoretical computer Science*, 6(1978), PP.317-325.

2. J.S.Lew and A.L.Rosenberg, Polynomial indexing of integer lattice-points I and II, *Journal of Number Theory*, 10(19 78)pp. 192-214, 215-243.

3. J.S.Lew, Polynomials in two variables taking distinit integer values at lattice-points, American Mathematical, Monthly, 88 (1981), PP. 344-346.