سیر تاریخی تعریف تابع

چند تعریف از مفهوم تابع

از برنولی تا بورباکی

نوشته : دیتر روتینگ

ترجمه : بهنام بازیگران

مفهوم تابع پایه و اساس تمام ریاضیات است. از قرن هیجدهم، تعیین و تعمیم این مفهوم، توجه زیادی را به خود جلب کرده است در این مقاله ما بعضی از تعاریف اصلی مفهوم تابع را، برحسب تقدم تاریخی، مرتب و بیان کرده‌ایم ولی هیچ اظهار نظری درباره‌ٔ این نقل قولها نمی‌کنیم. هریک را با دیگری مقایسه کنید و نتیجه بگیرید :

برنولی (۱۷۱۸) : یک تابع از یک متغیر، کمیتی است که به طریقی از این متغیر و مقادیر ثابت ترکیب یافته است .

اویلر (۱۷۴۸) : ۱. یک کمیت ثابت عبارت است از کمیت معینی که همیشه

یک مقدار را اختیار می‌کند ...

۰۲ یک کمیت متغیر یک کمیت نامعین یا عمومی است که در خود شامل تمام مقادیر معین است ...

۰۴ یک تابع از یک کمیت متغیر، عبارتی تحلیلی است که به طریقی از آن کمیت متغیر و اعداد یا کمیات ثابت ترکیب یافته است.

اویلر (۱۷۵۵) : به هر حال، در صورتی که بعضی از کمیات طوری به کمیات دیگر وابسته باشند که اگر کمیات اخیر تغییر پیدا کنند، تحت آن، کمیات نخست نیز تغییر یابند، آنگاه کمیات اول را توابع کمیات دوم می‌نامند. این تصور بسیار جامعی است و تمام روشهایی را که طی آن یک کمیت می‌تواند توسط بقیه کمیات مشخص شود در بر می‌گیرد. بنابراین اگر x نمایشگر یک کمیت متغیر باشد آنگاه تمام کمیاتی را که به طریقی به x بستگی دارند یا توسط آن معین می‌شوند تابع آن می‌نامند ...

لاگرانژ (۱۷۹۷) : یک تابع از یک یا چند کمیت عبارتی محاسبه‌ای است که به طریقی این کمیات در آن وارد شده و ممکن است با کمیات دیگری که به عنوان مقادیر داده شده در نظر گرفته شده‌اند و یا مقادیر ثابت ترکیب یافته باشد یا نیافته باشد، البته کمیتهای تابع می‌توانند تمام مقادیر ممکن را اختیار کنند. بنابراین در توابع تنها

کمیتهایی درنظرگرفته می‌شوندکه متغیرفرض شده‌اند، بدون توجه به ثابتهایی که می‌توانندبا آنها ترکیب شوند...

ما به‌طورکلی هرتابع ازیک متغیررا باحرف f یا F، که قبل از آن متغیرقرار دارد، نمایش می‌دهیم‌که منظورکمیتی وابسته به این متغیراست که‌باآن طبق قانون داده‌شده‌ای تغییرمی‌کند.

فوریه (۱۸۲۲) : به‌طورکلی‌تابع $f(x)$ نشاندهنده‌ٔ رشته‌ای ازمقادیریا رستهایی‌است که‌هرکدام‌دلخواه‌هستندودرمقابل بینهایت مقدار داده‌شده‌به‌خفت x، تعدادمساوی ازرستهای $f(x)$ وجوددارد‌وهمهٔ آنها دارای مقادیرعددی حقیقی مثبت، منفی،یا صفرهستند. فرض ما این نیست که‌این رستها پیروقانونی مشخص می‌باشند، آنها به هرطریق ممکن ازپی‌یکدیگرمی‌آیندوهرکدام‌مانندیک کمیت منفرد داده می‌شود.

کوشی (۱۸۲۳) : منظورازکمیت متغیرکمیتی است که متوالیا "تعدادی‌مقادیر مختلف رااختیارمی‌کند...

اگرکمیتهای متغیرطوری به‌هم‌مرتبط باشندکه‌بتوان باداشتن مقداریکی ازآنها، مقادیربقیه‌را نتیجه‌گرفت، آنگاه‌طبعا "تصور می‌شودکه‌این کمیتهای مختلف توسط یکی‌ازآنها، که‌به‌همین خاطر نام‌متغیرمستقل رابه‌خودمی‌گیرد، بیان می‌شوندوکمیتهای دیگر که‌توسط این متغیرمستقل بیان می‌شوندتوابع این متغیر

نامیده می‌شوند.

دیریکله (۱۸۳۷): فرض کنیم a و b دو مقدار مشخص باشند و x یک کمیت متغیر باشد که تدریجاً همهٔ مقادیر واقع بین a و b را می‌پذیرد. حال اگر به هر x یک y متناهی و یگانه طوری متناظر باشد که وقتی x به طور پیوسته از بازهٔ بین a و b می‌گذرد، $y=f(x)$ نیز تدریجاً تغییر کند، آنگاه y یک تابع ... پیوسته از x در این بازه نامیده می‌شود. بعلاوه، به هیچ وجه لازم نیست که y در تمام این بازه مطابق قانونی یکتا به x وابسته باشد، مخصوصاً لازم نیست که تنها به روابطی که توسط عملهای ریاضی بیان می‌شوند فکر کنیم.
در نمایش هندسی x و y خفت ورست تصور می‌شوند و تابع پیوسته نیز به صورت منحنی همبندی ظاهر می‌شود که به هر خفت بین a و b تنها یک نقطه بر روی آن نظیر می‌شود.

استوکس (۱۸۴۷): منظور من از تابع چنین است ... کمیتی که مقدار آن به طریقی به مقدار متغیر یا به مقادیر چند متغیر، که از آنها ترکیب یافته، بستگی دارد. بنابراین ضرورتی ندارد که تابع به این مفهوم، به صورت ترکیبی از نمادهای جبری بیان شده باشد، حتی اگر محدودهٔ متغیرهای آنها بسیار کوچک باشد.

استوکس (۱۸۴۸): واقعاً چیزی که به نظر من بیشترین اهمیت را دارا است

... این است که توابع را جدای از تمام ایده‌های عبارتهای جبری درنظرگرفت .

ریمان (۱۸۵۱) : فرض کنیم z یک کمیت متغیرباشدکه تدریجاً "می‌تواندهمهٔ مقادیرحقیقی را بپذیرد ،آنگاه اگربه‌هریک ازمقادیرآن یک مقداریگانه ازکمیت نامعین w متناظرشده‌باشد ، w تابعی از z نامیده می‌شود ...

بدیهی است که‌این تعریف به‌هیچ وجه‌قانونی بین مقادیر منفردتابع برقرارنمی‌سازد ،به‌طوری که‌اگراین تابع روی بازهٔ معینی‌تعریف شده‌باشد ،نحوهٔ ادامهٔ آن خارج ازفاصله کاملاً"دلخواه‌است .تفاوتی نمی‌کندکه‌وابستگی کمیت w به کمیت z ،آیا به‌عنوان کمیت دلخواه‌داده‌شده‌تعریف شده‌است یا به‌عنوان کمیت معین شده‌توسط اعمال مشخص کمیتها .

بول (۱۸۵۴) : تعریف ـ هرعبارت جبری،شامل نماد x ،یک تابع از x نامیده می‌شودومی‌تواندبه‌صورت عمومی‌وخلاصهٔ $f(x)$ نمایش داده‌شود ... براساس همین نمادگذاری ،اگردرهرتابع $f(x)$ ،نماد x رابه ۱ تبدیل کنیم‌نتیجه‌بانماد $f(1)$ بیان خواهدشد ،اگردر همان تابع ،نماد x را به 0 تبدیل کنیم ،نتیجه‌بانماد $f(0)$ بیان خواهدشد .

هانکل (۱۸۷۰) : یک تابع از x را f(x) می‌نامند اگر به هر مقدار از x در داخل یک بازهٔ مشخص مقدار منحصربه‌فردی نسبت داده شده باشد. بعلاوه در کل اهمیتی ندارد که f(x) کجا و چطور مشخص شده باشد، آیا با عملی تحلیلی از کمیات یا به طرق دیگر، تنها باید مقدار f(x) در همه جا مشخص شده باشد.

فرگه (۱۸۷۹) : اگر در یک عبارت ریاضی، که لزومی ندارد محتوای آن قابل بررسی باشد، یک علامت ساده یا مرکب یکبار یا بیشتر رخ بدهد و اگر ما آن علامت را در همه یا بعضی از این رخدادها جایگزین‌پذیر با چیزی دیگر (اما در همه جا با یک چیز) در نظر بگیریم، آنگاه آن قسمت از این عبارت را که تغییرناپذیر می‌ماند یک تابع و قسمت جایگزین‌پذیر را شناسهٔ تابع می‌نامیم.

ددکیند (۱۸۸۷) : منظور از نگاشت یک دستگاه S قانونی است که بر طبق آن به هر عضو مشخص s از S یک شئی مشخص که تصویر s نامیده می‌شود و با ψ(s) نمایش داده می‌شود، نسبت داده شود. همچنین می‌گوئیم که ψ(s) متناظر عضو s شده است یا به عبارتی ψ(s) با نگاشت ψ از s به دست آمده یا تولید شده است، یا اینکه s توسط نگاشت ψ به ψ(s) تبدیل یافته است.

تانری (۱۹۰۴) : اگر (X) را مجموعه‌ای از اعداد متمایز فرض کنیم و این

اعداد را به‌عنوان مقادیری که می‌توان به‌حرف x نسبت داد در نظر بگیریم، آنگاه x متغیر در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم هر مقدار را از x. یا به‌عبارتی هر عضو از مجموعهٔ (X)، متناظر شود به‌عددی که می‌توان آن را به‌عنوان مقدار منتسب به‌حرف y در نظر گرفت، در این صورت y را تابعی از x تعیین شده توسط مجموعهٔ (X) می‌نامند: یک تابع در این مجموعه تعریف شده است در صورتی که تناظری تعریف شده باشد. مجموعهٔ (Y) از مقادیر متمایزی که y اختیار می‌کند، با همان تناظر معین می‌شود: منظور از این که b یک عضو (Y) است آن است که عضو a از (X) متناظر به‌عدد b شده است. هر عضو (X) متناظر به‌یک عضو (Y) است و برعکس، اما در تعریف اخیر هیچ چیز مانع از متناظر شدن چند عضو مختلف (X) به یک عضو (Y) نمی‌شود، به‌عبارتی دیگر تعریف اخیر ایجاب نمی‌کند که تناظر بین (X) و (Y) کامل است.

هاردی (۱۹۰۸) : ایدهٔ تابع. فرض کنیم x و y دو متغیر حقیقی پیوسته باشند که می‌توانیم فرض کنیم به‌طور هندسی با فواصل $A_0P=x$ و $B_0Q=y$ که از نقاط ثابت A_0 و B_0 در طول دو خط مستقیم اندازه گرفته شده‌اند، نمایش داده شوند ... وفرض کنیم مکان نقاط P و Q مستقل نیستند، بلکه با رابطه‌ایی به‌هم مربوط شده‌اند که می‌توانیم تصور کنیم مانند رابطه‌ای بین x و y بیان شده است. مثلاً، می‌توانیم فرض کنیم $y=x$ ... یا $y=x^2+1$.

درتمام این حالات مقدار x ،مقدار y را تعیین می‌کنند...

درچنین مواقعی y تـــابعی از x نامیده می‌شود...

... بایدخاطرنشان کنیم‌که مثالهای ساده‌ٔ فوق ازتوابـــع سه مشخصه‌دارندکه به‌هیچ وجه‌درایده‌ٔ عمومی تابع وجـــود ندارند:

(۱) y به‌ازای هرمقدار x مشخص شده‌است ؛

(۲) به‌هرمقداراز x که y برای آن داده‌شده‌یک وتنها یک مقدار y متناظراست ؛

(۳) رابطهٔ بین x و y بافرمولی تحلیلی بیان شده‌که‌ازآن بـه ازای هرمقدارمشخص x می‌توان مقدار y متناظربه‌آن رابـــا جایگذاری مستقیم‌محاسبه‌کرد.

براستی بسیاری ازمهمترین توابع این مشخصات‌خاص رادارند. اما... آنها به‌هیچ وجه‌برای یک تابع اساسی‌نیستند. تنهـــا چیزی که‌اساسی است، این است‌که‌بایدرابطه‌ای بین x و y وجود داشته‌باشدبه‌طوری که‌به‌بعضی ازمقادیر x ،به‌نحوی ازانحاء ، مقادیری‌از y را متناظرکند.

پئانو (۱۹۱۱) : ... تابع رابطهٔ خاصی‌است‌که‌باآن به‌هرمقداراز متغیر مقداری‌یگانه متناظرمی‌شود. بانمادها به‌صورت زیرتعریـــف می‌شود:

$$\text{Functio} = \text{Retatio} \wedge u \ni \left[y;x \,\varepsilon\, u . z;x \,\varepsilon\, u . \supset_{x,y,z} . \ y=x \right] \qquad \text{Def.}$$

تابع عبارت است از رابطه‌ای مانند u که به ازای هر x و y و z اگر دو زوج y;x و z;x دارای عضو دوم یکسان باشند و در رابطهٔ u صدق کنند لزوماً "نتیجه می‌شود که y=x .

کری (۱۹۱۷) : به طور کلی، تناظری بین دو رده از اعداد که در آن به هر عدد از ردهٔ اول عددی از ردهٔ دوم متناظر شود یک رابطهٔ تابعی نامیده می‌شود. همچنین، متغیری که متناظر به اعداد در ردهٔ اول است متغیر مستقل و آنکه متناظر آنهایی است که در ردهٔ دوم هستند متغیر وابسته نامیده می‌شود. بدین طریق می‌توانیم بگوییم که یک رابطهٔ تابعی بین متغیرهای مستقل و وابسته وجود دارد، یا همان طور که معمولاً "بیشتر متداول است متغیر وابسته یک تابع از متغیر مستقل است ...

واژهٔ تابع اغلب در مواردی به کار می‌رود که نمی‌توان هیچ فرآیند ریاضی برای برقرار کردن تناظری بین دو رده از اعداد داده شده با مشاهده یا تجربه مشخص کرد .

گورسا (۱۹۲۳) : تعریف جدید اصطلاح تابع از کوشی و ریمان است. y تابعی از x نامیده می‌شود اگر هر مقدار از x متناظر به مقداری از y شود. این وابستگی با معادلهٔ y=f(x) نمایش داده می‌شود.

اکثر توابعی که ما بررسی می‌کنیم به طور تحلیلی تعریف شده‌اند، یا به عبارتی دیگر با تعیین اعمالی که باید به ترتیب انجام

شوندتا مقدار y از مقدار x نتیجه شود، اما این امر غالباً " ربطی به بحث تابع ندارد.

بورباکی (۱۹۳۹) : فرض کنیم E و F دو مجموعه باشند که ممکن است مجزا باشند یا نباشند. یک رابطه بین یک عضو متغیر x از E و یک عضو متغیر y از F یک رابطهٔ تابعی در y نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \varepsilon E$ مقدار یگانهٔ $y \varepsilon F$ وجود داشته باشد که با x در رابطهٔ داده شده باشد. ما نام تابع را به اعمالی اطلاق می‌کنیم که بدین طریق به هر $x \varepsilon E$ عضو $y \varepsilon F$ را که در رابطهٔ داده شده با x است مرتبط می‌کند. y مقدار تابع در عضو x نامیده می‌شود و می‌گوئیم تابع با آن رابطه معین شده است. دو رابطهٔ تابعی هم ارز (معادل) یک تابع را مشخص می‌کنند.

Dieter Rüthing
Some Definitions of the concept of Function from Joh.Bernoulli to N.Bourbaki

The Mathematical Intelligencer

V01.6, No. 4, 1984