پیک ریاضی
جلددوم‌شماره‌اول ،بهار ۱۳۶۶

قضیهٔ حد مرکزی درحدودسال ۱۹۳۵

نوشتهٔ : ل . لی کام

ترجمهٔ : علی همدانی

یادداشت

یکی ازمسائل مهم‌وقابل توجه‌درنظریهٔ احتمالات تعیین شرایط لازم‌وکافی برای تقریب قانون مجموع متغیرهای تصادفی با توزیع گاوس [نرمال] است .فصلی ازاین تحقیق وجستجودرسال ۱۹۳۵ بوسیله‌فلر(۱) ولوی(۲) ونتیجه‌بسیارجالب کرامر(۳)که‌دراوایل سال ۱۹۳۶ منتشرگردید بسته‌شد .دراین نوشتارسعی می‌شودتابترتیب سهم‌فلر ،لوی،لاپلاس(۴) پوآسون(۵) ، لیندبرگ(۶) ، برنشتاین(۷) ،کولمگروف(۸) وسایرین رادراین موضوع‌ارائه‌کنیم .

مقدمه

دوموآور ،لاپلاس وبرنولی‌ها اولین کسانی بودندکه‌قضایای حدی را عرضه‌کردندواهمیت آنهارافهمیدندوبه‌نام‌گاوس ، نامگذاری‌کردند .بعدها

نسل جدید می‌گفت که این قضایا دارای جنبه‌های تجربی نیرومند ولی فاقد دقت زیاد است. سپس نوبت چبیشف، لیاپونف و مارکوف است که اثباتی دقیق ارائه کردند و پولیا اهمیت آن را دریافت و متذکر شد که باید آن را قضیه حد مرکزی نامید.

لیندبرگ ادعا کرد که نتایج به دست آمده مقدماتی است، زیرا که تیلور آنچه را که لازم بوده است توسعه داده و باز آن را بیان کرده است، اما لوی مشاهده کرد که تبدیلات فوریه همان توابع مشخصه هستند و گفت که "باید آنها را توسعه داد و قضایای حدی و قوانین مستحکمی را نتیجه گرفت". در واقع نتایج حاصل خوب، مستحکم و کافی بودند اما این سوال مطرح بود که آیا لازم نیز هست؟ جواب لوی این بود که آنها در واقع لازم نیستند اما زمانی خواهد رسید که در واقع گاوس هیچ سهمی در این قضایا بجز تصورات خودش نخواهد داشت و آن زمان است که لازم نیز هست. "این تنها یک پیشگویی بود، تا وقتیکه کرامر اعلام کرد که زمان موعود فرارسیده است و موجب خوشنودی همگی شد، تا آنجا که لوی گفت باید آن را در کتاب مقدس یادداشت کرد و خود این کار را کرد. زمان گذشت و قضایای حدی زیادی مطرح شد که خیلی از آنها مرکزی بودند و گاهنامه‌ها را لبریز کردند. و این تاریخچه قضیهٔ حد مرکزی است.

آنچه گذشت در واقع تاریخچه‌ای، هرچند کوتاه، از قضیهٔ حد مرکزی بود. نام قضیهٔ حد مرکزی اکنون به جنبه‌های وسیعی از نتایج مختلف اطلاق می‌شود. پولیا در سال ۱۹۲۰ این نام را بر آن نهاد، بدین دلیل که "تحت بعضی از شرایط، مجموع متغیرهای تصادفی مستقل که بطور مناسبی معیار شده‌اند دارای تابع توزیع تجمعی هستند که به رابطه معروف دوموآور ـ لاپلاس:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

نزدیک است .

در اینجا سعی خواهیم کرد تا قسمتی از تاریخچه قضیهٔ حد مرکزی را که به سالهای بین ۱۹۲۰ و ۱۹۳۷ مربوط است ارائه کنیم. پیشرفت این قضیه در آن زمان مدیون دانشمندانی از قبیل برنشتاین، لیندبرگ، لوی، فلر وکولموگروف است . به دلایل متعددی توجهی خاص به سهم لوی در این زمینه داریم . یکی از آنها این است که، یکی از مقالات مهم لوی در این زمینه در مجموعه کارهای او که در سال ۱۹۷۶ منتشر شد نیامده است ولوی در آخر عمر خود از این مساله شکایت داشت که برای این کار او ارزش لازم را قائل نشده اند، ومطابق معمول افتخار یافتن تمام شرایط لازم برای قضیهٔ حد مرکزی را به فلر بخشیده اند .

همچنانکه خواهیم دید موضوع حق تقدم بطور چشمگیری پیچیده است در بند ۴ این نوشتار آن را شرح خواهیم داد .

برای بررسی وضعیت مساله، ابتدا بیانهای مختلفی از قضیهٔ حد مرکزی را مرور می‌کنیم وسپس آنها را براساس ساختار صوری که دارند رده بندی می‌کنیم. این کار در بند دوم مقاله انجام می‌شود. سپس در بند سوم مروری کوتاه از سهم لاپلاس، لیاپونف، لیندبرگ وبرنشتاین را ارائه می‌کنیم. تا اینجا ماجرا به اواخر سالهای ۱۹۲۰ یا اوایل ۱۹۳۰ می‌رسد، زمانی که سهم واقعی واصلی از آن کولموگروف ولوی همراه با تنظیم نهائی مساله توسط کرامر در سال ۱۹۳۶ است .

تعدد مقالات منتشر شده بعد از سال ۱۹۳۵ مرور سریع آنها را مشکل می‌سازد، لذا علاقمندان می‌توانند به کتابهای جدیدی که بوسیلهٔ آراجو وگینه [10] (۱۹۸۰)، پولارد [11] (۱۹۸۴) ویا مقالات مکیز [12] (۱۹۶۸)، زانیسف [13] وآراک [14] (۱۹۸۴)، دادلی [15] وفیلیپ [16] (۱۹۸۳) وهمچنین سمینارهای ماثوری ـ شوارتز [17] در اکول پلی تکنیک [18] (۱۹۷۲-۱۹۸۱) [9]

مراجعه کنند.

اصطلاح توزیع با چگالی $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ را دوموآور (۱۹۳۸) معرفی کرد. این توزیع و انواعی از آن که با تغییرات مکان و مقیاس به دست می‌آیند امروزه توزیع نرمال (یا بهنجار) خوانده می‌شود. همانطورکه هرکس که با مسائل پزشکی سروکار دارد می‌تواند تصدیق کند، این نامگذاری گمراه‌کننده است: بیماران (یعنی "آنرمال"ها یا "نابهنجار"ها) ممکن است توزیع "نرمال" داشته باشند، درحالی که "واریسهای نرمال" توزیع نرمال نداشته باشند. ما به پیروی از لوی اصطلاح توزیع "گاوسی" را به کار می‌بریم، نه به دلیل اینکه گاوس سهم زیادی در آن داشته است، چون او درا ثبات یا بیان قضایای حد مرکزی دخالتی نداشته است. هرچندکه او مقاله‌ای ارائه داد که در آن به توصیف روش حداقل مربعات لژاندر (۱۹) پرداخته است (۱۸۰۹). مقالهٔ مذکوریا اصلاً داوری نشده است ویا اینکه داورکارش را خوب انجام نداده است. بحث گاوس در آن مقاله کاملاً "حالت دوری دارد": "هرکس می‌داندکه متوسط مشاهدات بهترین تخمین امیدریاضی است ومنحنی دوموآورتنها منحنی است که برای پارامترمکان آن صادق است ولذا مشاهدات بایستی از آن توزیع پیروی کنند، درنتیجه روش حداقل مربعات بهترین است." بعلاوه گاوس نمونهای ازقضیه بیز را به کار می‌برد، بدون آنکه اشاره‌ای به نام بیز و یا لاپلاس که سالها قبل ازگاوس (۱۷۷۸) آن را کاملاً شرح داده بود، بکند. اثبات فرمول بیزبوسیلهٔ گاوس به هیچ وجه دقت لازم درا بطه با معیارهای عصرخودرا نداشت. گاوس انتشارات غرورآفرینی داشت که انگشت شمار ولی بسیار درخشان بودند. نمی‌توان گفت مقالهٔ مذکوراز آن نوع بوده است. هر چندا و شکایت داشت ازاینکه سه سال طول کشیده است تا مقاله، به زبان لاتین ترجمه شود. به هرحال به نظرمی‌رسدکاملاً "بزازنده است که بنا برقانون

نامگذاری استیفن استیگلر، توزیعی راکه دوموآورمعرفی کرده است گاوسی بنامیم.

۲. قضیهٔ حدمرکزی چیست؟

نام قضیهٔ حدمرکزی درحال حاضربرای نتایج مختلفی ازرفتار توزیع مجموع متغیرهای تصادفی یا عناصرتصادفی که مقادیری درفضاهای گوناگون مثلاً "فضهای باناخ یاگروهها"، انتخاب می‌کنند به کاربرده می‌شود، دراینجا عمدتاً "به متغیرهای تصادفی مستقل حقیقی وتقریب آنها با توزیع نرمال توجه خواهیم داشت. صفت مرکزی توسط پولیا (۱۹۲۰) بدین علت داده شده است که این قضیه نقشی مرکزی درنظریهٔ احتمالات ایفا می‌کند ونه بدین دلیل که رفتار مرکزتوزیع را درمقابل کناره‌های آن توضیح می‌دهد، یعنی آنچه که ریاضیدانان امروزی فرانسه به آن عقیده دارند، یکی از معمول ترین صورتهای قضیه که به کاربرده می‌شود چنین است: فرض کنیم $X_1 \ldots X_n$ ، n متغیرتصادفی با مجموع $S=\sum_{j=1}^{n} X_j$ باشند.

قضیهٔ ۱. گیریم X_j ها متغیرهای تصادفی مستقل با امیدریاضی صفر وپراش σ_j^2 ، s انحراف معیار مجموع S، و F توزیع تجمعی $\frac{S}{s}$ باشد. می‌نهیم

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

دراین صورت هرگاه $\sum_j E\{|X_{j/s}|^2 I[|X_j|>\varepsilon s]\}<\varepsilon$ آنگاه داریم:

$$\sup_x |F(x)-\psi(x)| < 5\varepsilon$$

این شکل ازبیان قضیه، مشابه بیانی است که لیندبرگ درسال ۱۹۲۲ داده:

است ،با این تفاوت که ما کران مشخصی را که بهتر از کران لیندبرگ است ارائه داده ایم .قابل توجه است که این قضیه واقعا "یک قضیهٔ حدی نیست ،بلکه یک " قضیه تقریب ساز" است ،زیرا که فاصلهٔ بین دوتوزیع تجمعی بوسیله تابعی کراندار شده است که خود قابل محاسبه توسط متغیرهای فردی است .به این ترتیب برای تشریح سهم افراد مختلف بهتر است که قضایا را با توجه به شکل منطقی شان رده بندی کنیم ،که در این صورت سه تیره اصلی وجود دارد.

الف) قضایای تقریب ساز ،که فاصلهٔ بین توزیع مجموع وتوزیع تقریب شده بوسیله عبارتی مناسب محدودشده باشد ،مانند قضیهٔ ۱ یا قضیهٔ بری (۲۰) اسین (۲۱).

ب) قضایای حدی برای آرایشهای مثلثی که دنبالهٔ مضاعف $\{X_{n,j}:j=1,2,\ldots,K_n, n=1,2,\ldots\}$ را با مجموع $S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$ دربردارند وتوزیع حدی S_n را بررسی می‌کنند.

پ) مجموعهای هنجار شده ،هنگامی که دنبالهٔ $\{X_j:j=1,2,\ldots\}$ را درنظر می‌گیریم وسعی می‌کنیم تا ثابتهای a_n و c_n را چنان پیدا کنیم که هرگاه $S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$ توزیع $\frac{S_n-C_n}{a_n}$ به حدی میل کند.

همانگونه که خواهیم دید فلر و لوی در سال ۱۹۳۵ مجموع هنجار شده را درنظر گرفتند ودرواقع فقط حالت خاصی از قضیه را بررسی کردند.

رده بندی دیگری از قضایا را می‌توان متناظر با روش " هنجار ساختن " به دست آورد .مثلا"قضیهٔ ۱ ازروشی که " هنجار ساختن کلاسیک " توسط امیدهای ریاضی وانحراف معیارها نامیده می‌شود استفاده می‌کند هنجار ساختن کلاسیک مدتها ست که دوام دارد ،مثلا" درمقالهٔ سال ۱۹۳۳ کولموگروف وکتاب خینچین (۱۹۳۳) به کار رفته است ،وعجیب است که از این روش درمقالهٔ سال ۱۹۳۱ لوی

استفاده نشده است. امکان کارکردن بدون گشتاورها وبکارگیری ثابتهای هنجارکننده دیگر، توسط برنشتاین (۱۹۲۶) به طور خلاصه بیان شده است و مقالهٔ سال ۱۹۳۱ لوی ایدهٔ استفاده از گشتاورها را به خینچین داد.

قضیهٔ ۱ فاصلهٔ عمودی بین توابع توزیع تجمعی را به عنوان فاصله به کار می‌برد. می‌توان فاصلهٔ ضعیف ترلوی را هم به کار برد. بعضی از نویسندگان مخصوصا "خینچین (۱۹۳۸) فاصلهٔ بین چگالیها را به کار می‌برد. ما وارد جزئیات همهٔ فاصله‌های ممکن نخواهیم شد و همان فاصلهٔ عمودی بین توابع توزیع تجمعی را درنظر می‌گیریم.

قضیهٔ ۱ را باید با قضیهٔ ۴ که درزیر می‌آید مقایسه کرد. قضیهٔ ۴ آخرین صورت قضیهٔ حد مرکزی است که لوی در تک نگاری سال ۱۹۳۷ خود مطرح می‌کند، در آنجا قضیه شکلی شهودی دارد و برگردان آن به زبان $\varepsilon-\delta$ تمرین بسیار جالبی است که می‌توان آن را انجام داد. صورتهای دیگر قضیهٔ حد مرکزی اخیرا" توسط زولوتارف (۱۹۶۷) برای حالت کلاسیک، مکیز (۱۹۶۸) برای حالتی که توزیع عمومی گاوس را دربردارد و زولوتارف (۱۹۷۰) برای یک حالت کلیتر عنوان شده است.

قضیهٔ ۲. برای اینکه مجموع $S=\sum\limits_j X_j$ از متغیرهای مستقل توزیعی نزدیک به توزیع گاوسی داشته باشد لازم و کافی است که بعد از کاهش میانه‌ها به صفر شرایط زیر برقرار باشد.

۱. هر سازهٔ جمع (جمعیده) که در مقایسه با پراکندگی کل مجموع ناچیز نباشد توزیعی نزدیک به توزیع گاوسی داشته باشد.

۲. حداکثر قدر مطلق جمعیده‌های ناچیز، در مقایسه با پراکندگی مجموع، ناچیز باشد.

بعضی ازعبارتهایی که دربالا به کاربرده شده اند، نیاز به توضیح دارند.
قابل توجه است که در اینجا هیچ ذکری از گشتاور، امید ریاضی و پراش به میان نیامده است. در اینجا "پراکندگی "مجموع S را می‌توان، مثلا" توسط بردبین چارکهای آن اندازه گرفت. برای نتایج کلیتر، به منظور استفاده از توزیعات تقسیم‌پذیر نامتناهی به جای تقریب گاوسی، نیاز مند بکارگیری تابع تجمع ساز پاول‌لوی $C(\sigma) = \mathrm{Sup}_x\ P[x<S<x+\sigma]$ یا وارون آن است، که تابع پراکندگی، $D(\alpha)$، نامیده می‌شود و برابر اینفیموم درازای بازه‌های شامل S، با احتمال مساوی با یا بیشتر از α است.
برای اندازه‌گیری اینکه در حالت گاوسی، یک توزیع تا چه اندازه به توزیع دیگر نزدیک است، لوی فاصله عمودی کولموگروف $\rho(F_1,F_2)=\mathrm{Sup}_x|F_1(x)-F_2(x)|$ را بین توزیع های تجمعی به کار می‌برد. سازه X_j از مجموع را می‌توان "ناچیز" به اندازه ε نامید هرگاه $\mathrm{Prob}[\ |X_j|>\varepsilon\ L] <\varepsilon$ که L برد بین چارکهای S است.
تفاوت اساسی بین قضیه ۱ و قضیه ۲ این است که قضیه ۱ فقط شرطی کافی ارائه می‌کند، درحالیکه قضیه ۲ شرایط لازم و کافی را بیان می‌کند. تفاوت چندان دشواری در آن نیست، در قضیه ۱، $\mathrm{Sup}_j \mathrm{Prob}[\ |X_j|>\varepsilon S]$ باید کوچک باشد در حالیکه در قضیه ۲ بجز استقلال [متغیرها] ابدا" شرطی در نظر گرفته نمی‌شود. این بدین دلیل است که لوی بتواند قضیه معروف کرامر را به کار ببرد (لوی، ۱۹۲۵):

قضیه ۳. اگر حاصلجمع $x+y$ از دو متغیر مستقل دارای توزیع گاوسی باشد در اینصورت هم x و هم y نیز چنین هستند.

صحت این قضیه درسال ۱۹۲۸ در یک مجادلهٔ علمی بین لوی وفرشه توسط لوی حدس زده شد. این مجادله حول دو موضوع دور می‌زد. یکی صحت قضیهٔ لوی بود که در کتاب سال ۱۹۲۵ او آمده بود. فرشه " مثال ناقضی " به صورت سری همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ ارائه داد که در آن ε_nها به طوریکنواخت در $[-1,1]$ توزیع شده بودند. فرشه این مثال را به هاسدورف (۲۲) نسبت می‌داد، هرچند که پوآسون در ۱۸۲۴ حالت مشابهی را درنظر گرفته بود که در آن ε_nها توسط چگالی نهایی متقارن $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ توزیع شده بودند. لوی درجواب، استدلال می‌کرد، که در حالتی که سری همگراست هر سازه بخش ناچیزی از پراکندگی مجموع را می‌سازد و تحت چنین شرایطی نمی‌توان انتظار داشت که قضیهٔ حد مرکزی درست باشد.

جنبهٔ دیگر انتقاد فرشه این بود که در نظریهٔ خطاهای (مشاهداتی) نمی‌توان فرض کرد که عوامل مختلف خطا، بروشی افزودنی عمل می‌کنند. او " قانون مرکب " متفاوتی را پیشنهاد کرد که "خطای کل "را ماکزیمم اجزاء مستقلی می‌دانست که آن را به وجود می‌آوردند. این نکته جالب توجه است که فرشه هرگز از این موضوع دست برنداشت. من شاهد تبادل نظرهای بین فرشه و لوی درچهل سال اخیر بوده‌ام، که در جایی لوی مودبانه ولی با لحنی آزاردهنده پاسخ می‌دهد که :" اما، موسیوفرشه ما چندین بار در این زمینه از سال ۱۹۲۸ تاکنون صحبت کرده‌ایم". همچنانکه در بند بعد خواهیم دید، فرشه عقاید برتران (۲۳)، پوآنکاره (۲۴) وبورل (۲۵) را که پیشتر بیان کرده بودند، منعکس می‌کرد.

لوی صحت قضیهٔ ۳ را حدس زده بود اما نتوانسته بود آن را اثبات کند. کرامر در ژانویه ۱۹۳۶ اثبات قضیهٔ قویتر زیر را بدست آورد.

گیریم $\psi(z) = E\, e^{zx}$. اگر ψ تابعی تمام باشد که هیچ جا صفر

نمی‌شود و اگر $\log^{+}$ قسمت مثبت تابع لگاریتم را نمایش دهد، و

$$\lim_{|z|\to\infty} \sup \frac{1}{|z|^{2}} \log^{+} |\psi(z)| < \infty$$

در این صورت X دارای توزیع گاوسی است.

برای اثبات این قضیه کرامر قضیه‌ای عمیق از هادامار [۲۶] را به‌کار برده بود. لوی بیدرنگ خاطرنشان کرد که تحت شرایط قضیهٔ ۳ می‌توان $|\log|$ را به‌جای $\log^{+}$ به‌کار برد و با قضیهٔ ساده‌ای در توابع همساز (هارمونیک) نتیجه مطلوب را به‌دست آورد.

درواقع با بکارگیری قضیهٔ کرامر، لوی توانست شرایط لازم و کافی را برای تقریب گاوسی به‌دست آورد و به نوشتن اثر مشهورش:

" theorie de l'Addition des variables Aleatores"

در ۱۹۳۷ رهنمون شود.

۳. از لاپلاس تا برنشتاین

دوموآور، ریاضی دان فرانسوی، که به‌خاطر تعقیب مذهبی به انگلستان تبعید شده بود، معمولاً" به اثبات اینکه توزیعهای دوجمله‌ای را می‌توان با توزیع گاوسی تقریب کرد، مفتخر است. این قضیه را، دوموآور بر اساس دستوری که خود ثابت کرده بود، و اکنون دستور استرلینگ نامیده می‌شود، ودر اثر سال ۱۷۳۳ او با عنوان "آموزهٔ شانس‌ها" آمده است، به‌دست آورد. لاپلاس گهگاه از لاگرانژ نقل می‌کرد که این قضیه بسیار خاص است، و خودش چندین مقاله برای توسعهٔ کار دوموآور نوشت. سرانجام در ۱۸۱۰، مقاله‌ای منتشر کرد که صورتی کلی از قضیهٔ حد مرکزی را بیان و "اثبات" می‌کرد.
اثبات لاپلاس بطور مشخص برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل کرانداری درست بود که مقادیرشان مضارب صحیحی از عدد ε است (متغیرهای جدا). برای

اثبات از چیزی استفاده شده بود که امروزه تابع مشخصه یا تبدیل فوریه، $E\,e^{itx}$، به ازای t حقیقی، نامیده می‌شود. لاپلاس با شتاب از متغیرهای جدا به متغیرهای پیوسته گذر کرد. و از اینرو می‌توان بفوریت دید که این کار چندان جدی نبوده است. همچنین لاپلاس گریزی به متغیرهای تصادفی بیکران زده است، او می‌گوید: "کار ساده‌ای است، آنگونه که در مثال تابع چگالی $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ نشان خواهم داد". متاسفانه این گریز تا اندازه‌ای افراطی بود. پوآسون در ۱۸۲۴ مثالهای نقضی را ارائه داد که شامل توزیع کوشی وسری همگرای از نوع مثال ۱۹۲۸ فرشه، بودند. در همان مقاله، پوآسون نتایج لاپلاس را به مجموعهای $\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\ldots+\gamma_nx_n$ که در آن x_i ها مستقل واز حیث قدر مطلق توسط ثابتی کراندار بودند، اما لزوماً "بطوریکسانی توزیع نشده بودند"، توسعه داد.

ضرایب γ_j غیرتصادفی بودند فرض این بود که کراندارونا صفرند بقسمی که پراشهای $\gamma_j^2\,\mathrm{Var}x_j$ کراندار باقی می‌مانند. پوآسون فرضهای بیشتری را پذیرفته است که خیلی روشن بیان نشده‌اند. جز این مورد، و این واقعیت که او با حدود تحت علامت انتگرال بدون قید و شرط رفتار می‌کرده است، اثبات او کاملاً" درست است. و هرکس می‌تواند متقاعد شود که او خیلی خوب می‌دانسته است که چه می‌کنند.

اولین اثبات دقیق را معمولاً" به لیاپونوف (۱۹۰۰) نسبت می‌دهند که حدود ۹۰ سال بعد از کار لاپلاس داده شده است. بسیار جالب توجه است که لیاپونوف کار لاپلاس را قدم بقدم دنبال کرده است، او تنها متغیرهایی را با بردکراندار متمایز کرده و به کار می‌برد. به هر حال او برای این متغیرها، پس از محاسبات مغلق و پیچیده در می‌یابد که کراندار کردن فاصله $\sup_x|F(x)-\psi(x)|$ منجر به این شود که می‌تواند قضیه را در حالتی

$$\sum_j E \frac{|X_j|^3}{[\sum_j EX_j^2]^{3/2}}$$ و $EX_j = 0$ که

به سمت صفر میل می‌کند، باز هم درست بداند. این نتیجه بسرعت توسط مارکوف (۱۹۰۰) و خود لیاپونف (۱۹۰۱) اصلاح شد. ظاهراً "مارکوف اولین کسی است که کوشید تا شرط استقلال را بر متغیرها بگذارد. او قضیه را برای آنچه که اکنون "زنجیره‌های مارکوفی" نامیده می‌شود ارائه داد (۱۹۰۸). کار مارکوف به ردهٔ وسیع‌تری از مسائل، توسط سرگئی برنشتاین توسعه داده شد. او در ۱۹۲۲ یادداشت کوتاهی منتشر کرد و مدعی شد که او این کار را در سالهای ۱۹۱۷-۱۹۱۸ انجام داده است. مقاله وی با اثباتهای کامل در ۱۹۲۶ ارائه شد.

اثباتهای انجام شده توسط این نویسندگان دو نوع هستند. بعضی (مثل چبیشف و مارکوف) از روش گشتاورها استفاده می‌کردند. سایر اثباتها متکی بود بر تبدیلات فوریه که توابع مشخصه نیز نامیده می‌شوند، از نوع $\psi(t) = E\, e^{itX}$ با $i = \sqrt{-1}$ و t حقیقی. مطمئناً "اینها در همان خط کار ۱۸۱۰ لاپلاس بودند. برنشتاین متغیرهای مقادیر برداری را به کار گرفت، لاپلاس امکان چنین توسیع هایی را خاطرنشان کرده بود، در واقع او حدود گاوسی دو متغیره را به دست آورده بود (۱۸۱۰).

این درست است که اثباتهای لاپلاس، در جاهایی ناقص است، اگرچه برای حالتهایی که او در نظر گرفته بود (توزیع یکسان یا توزیعات انتخاب شده از یک خانوادهٔ متناهی) ابداً "مشکلی برای ارائه اثباتی کاملاً" دقیق وجود نداشت. همین مطلب به اثبات سال ۱۸۲۴ پوآسون قابل اطلاق است. بنابراین از اینکه مدت درازی گذشت تا اثباتهای دقیق توسط لیاپونف بازنویسی شد، خیلی عجیب است. اگرچه در این فاصله کوششهایی از جمله توسط گلیشر [(۲۷)] در ۱۸۷۲ صورت پذیرفت. بهرحال هیچیک از آنالیز دانهای توانمند سدهٔ نوزدهم (مثل کوشی، که توابع مشخصه و قوانین

پایداری را می‌دانیم) قادر به بازنویسی اثباتهای لاپلاس نبودند. حتی قابل توجه‌تر اینکه نه ژوزف برتران و نه هنری پوآنکاره، که سرآمد احتمال دانان آن زمان فرانسه شناخته می‌شوند، نتوانستند این کار را انجام دهند. برتران و پوآنکاره در حساب احتمالات، موضوعی که هیچکدامشان سررشته‌ای از آن نداشت، کتابهایی نوشته‌اند. کتاب برتران غیر از ارزیابی ضعیفی که از استدلال دوری گاوس می‌کند، در اساس شامل تکرار ادعاهایی است مبنی بر اینکه پیشنیان او اشتباهات منطقی نابجایی کرده‌اند. پوآنکاره تقریباً "شرح جامعی از بحث گاوس و انتقاد برتران بر آن ارائه می‌کند. یک چنین انتقادی، آن بود که چگالی مشاهدات ممکن است انتقالی از نوع $f(x-\theta)$ نباشد بلکه بصورت کلیتر $f(X_1,\theta)$ باشد. او نشان داد که اگر متوسط مشاهدات ماکزیمم تخمین احتمالی باشد، این صورت در حالت کلی $f(X_1,\theta)$ لازم نیست گاوسی باشد بلکه یک خانواده‌ٔ نمایی است. او ادامه می‌دهد که "اصل میانگین حسابی "قابل ایراد است و توضیح می‌دهد که به امر مشاهدات باید وزن کمتری از سایر امور نسبت داد.

پوآنکاره سپس می‌گوید که بهترین روش بررسی قانون گاوس این است که وقتی تعداد زیادی از متغیرهای مستقل کوچک را جمع می‌کنیم، توزیع حاصلجمع تقریباً "گاوسی باشد. واو دو "اثبات" ارائه می‌کند، یکی توسط روش گشتاورها و دیگری توسط تبدیلات لاپلاس. بهرحال در این "اثباتها" ایرادهای عمده وجود دارد، از جمله اینکه او نه اثبات می‌کند و نه حتی اشاره می‌کند که اگر تبدیلات لاپلاس همگرا باشند توزیعات چطور می‌شوند؟ پوآنکاره مراجع زیادی را هم ارائه نمی‌کند. از برتران و گاوس بدون اشاره به محلی که بتوان کارهایشان را یافت، نام می‌برد. در واقع او بجز نام بردن از بعضی کارهای خودش تنها مرجعی که می‌دهد بعضی کارهای جبری فروبنیوس(۲۸) است.

بورل که بعداز پوآنکاره، سرآمد احتمال دانان فرانسه است در کتاب سال ۱۹۲۴ خود می‌گوید که او:

> علاقه‌ای به بحثهای نظری و پیشرفتهای ریاضی مربوط به توزیع لاپلاس ـ گاوس ندارد، در واقع به نظر نمی‌رسد که نتایج حاصل شده آنقدر مهم باشند که کوششی تحلیلی برای حفظ آنها لازم باشد......

بورل ادامه می‌دهد که "ممکن است اثبات قضایای معینی امکان پذیر باشد. اما آنها چندان جالب نخواهند بود، چون، در عمل، نمی‌توان صحت فرضیات پذیرفته شده را تحقیق کرد. این عقاید مجدداً "در بازنویسی سال ۱۹۵۰ کتاب مقدمات بورل بیان شده‌اند.

توضیح اینکه چرا فرانسویها نام لاپلاس را نادیده گرفته و قضیه را به ریاضیدان آلمانی گاوس نسبت می‌دهند، مشکل است. استیگلر (۲۹) دلایلی برای عدم بکارگیری عباراتی از قبیل توزیع لاپلاس ارائه داده است. اما توضیح او کافی نیست. شوبر (۳۰) در کتاب ارزشمند سال ۱۸۹۱ خود، جزدر مورد اینکه او فکر می‌کند که لاپلاس تنها حالت متغیرهای توزیعی متقارن را بررسی کرده است، برخورد بهتری دارد. در سال ۱۹۱۹ هنگامیکه از لوی خواسته شد تا در اکول پلی تکنیک، درس احتمال بدهد او کتاب پوآنکاره را اساس کار خود قرار داد. او کاملاً "از نتایج مکتب روسی بی خبر بود. و شاید عجیب‌تر از این، بی خبری او از کارهای لاپلاس و کوشی است زیرا او می‌گفت: "به این مطالب در کتابهای برتران، پوآنکاره، یا بورل اشاره نشده است" او تکنیک توابع مشخصه را دوباره ابداع کرد. تنها بعد از آن بود که پولیا در زوریخ به او گفت، کوشی قبل از او این مطالب را به کار برده است و دستوراتی برای

توابع مشخصهٔ توزیعات پایدار (متقارن) ارائه داده است.
با همهٔ اینها وقتیکه لیندبرگ در ۱۹۲۰ و ۱۹۲۲، اثباتی کامل ومقدماتی از قضیهٔ حدمرکزی راکه دراساس به صورت قضیهٔ ۱ ما بود، بند ۲ (امانه باکران مشخصی که در اینجا داده شد) ارائه داد، بسیار اعجاب انگیز بود. اثبات لیندبرگ بسیار رسا داده است. ودرنهایت سادگی به بردارهای تصادفی اقلیدس ویا حتی هیلبرتی قابل اعمال است. لوی که شکل دیگری از آن را درحساب احتمالات خود در ۱۹۲۵، آورده است، کوشش می‌کندتا با استفاده از آن قضیهٔ حدمرکزی را برای مارتینگل(۳۱)ها در ۱۹۳۴ بدست آورد. با این وجود اثبات او درکتابهای درسی متعارف نیامده است (جزدریک مورد، درکتاب توماسیان (۱۹۶۹)) وبعضی از احتمال دانان مشهور مشکلاتی با آن داشتند. مثلا" فلر می‌گوید:

> روش لیندبرگ بغرنج وپیچیده است ودرعمل
> جایگزین روش توابع مشخصهٔ لوی نبود.
> جریانی که اجازه می‌دادتکنیکهای جدید روش
> لیندبرگ را بروشی ساده وشهودی عرضه کنند
> توسط هـ . ف . تروتر(۳۲) در ۱۹۵۹ نشان
> داده شد.

این گفته مسلما" بسیار اغراق آمیز است بواقع تفاوت روش تروتر با روش لیندبرگ غالبا" درتغییر اصطلاحات است: اواز "عملگرهای پیچشی" بجای "پیچش توابع توزیع تجمعی" که لیندبرگ به کار می‌برد، استفاده می‌کند. روی آوردن لوی به "عملگرهای پیچشی" بجای حاصلجمع های متغیرهای تصادفی نابجا بود: بکاربردن این روش درمارتینگل ها کار مشکلی است. بعلاوه،

استفاده از "عملگرهای پیچشی" جدا از بکارگیری توابع مشخصه نیست، چون تبدیلات لاپلاس درست چیزی است که نیاز به نمایش جبر پیچشی اندازه‌های مطلقا "پیوسته توسط جبر توابع تحت عمل ضرب نقطه‌ای دارد.

بطور خلاصه، روش لیندبرگ چنین است: حاصلجمع های $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$ و $T_n=y_1+y_2+\ldots+y_n$ را درنظر بگیرید. فرض کنید f تابعی کراندار است.

دراینصورت:

$$Ef(S_n)-Ef(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \{Ef(R_k+X_k)-Ef(R_k+X_k)\}$$

که در آن $R_k=(\sum_{j<k} X_j)+(\sum_{j>k} y_j)$. اگر f دوبار مشتق داشته باشد، ومشتق دوم شرط لیپشیتز (۳۳) را بپذیرد، $|f''(u)-f''(v)|<A|u-v|$، آنگاه از بسط $f(R_k+X_k)$ و $f(R_k+y_k)$ حول R_k مثلا" داریم:

$$f(R_k+X_k)=f(R_k)+X_kf'(R_k)+\frac{X_k^2}{2}f''(R_k)+\frac{X_k^2}{2}[f''(R_k^*)-f''(R_k)].$$

که در آن R_k^* بین R_k و R_k+x_k است. اکنون اگر x_k و y_k ها همه مستقل، با $EX_k=Ey_k=0$ و $EX_k^2=Ey_k^2=\sigma_k^2$، آنگاه اختلاف امیدهای ریاضی $Ef(R_k+X_k)-Ef(R_k+y_k)$ تنها شامل جملات "مرتبه سوم"

$$E\frac{X_k^2}{2}[f''(R_k^*)-f''(R_k)]$$

وجمله مشابهی است که از تعویض X_k با y_k به دست می‌آید. این رابطه بیدرنگ رابطه:

$$|Ef(S_n)-Ef(T_n)|<\frac{1}{6}A\sum E\{|X_k|^3+|y_k|^3\}$$

را به دست می‌دهد .

لیندبرگ y_j ها را متغیرهای مستقل گاوسی می‌گیرد. هموار ری تابع شاخص دربازه $[-\infty, x]$ وقبول $\sum \sigma_j^2 = 1$ ، رابطه‌ای ازنوع زیررا به دست می‌دهد

$$\mathrm{Sup}_x \ |F(x)-\psi(x)| < C \ \{ \sum_k \ [E(X_k)^3 + |y_k|^3 \ ]\}^{1/4}$$

برای دست یابی به قضیه لیندبرگ بصورت کلی آن ،کافی‌است تا استدلال خلاصه سازی متعارف راکه لیاپونف در ۱۹۰۰ به کاربرده است ،مورداستفاده قرارداد. توجه شودکه استدلال لیندبرگ را می‌توان برای بردارهای تصادفی که علامت قدرمطلق $|X_k|^3$ را به عنوان نرم آنها تعریف شده باشد ،به کار برد. دراین صورت آن را می‌توان به فضای هیلبرت یا هرفضای باناخ که توپولوژی آن رابتوان ازتوابعی که مشتق دومشان شرط لیپشیتزرا می‌پذیرند به دست آورد ،توسعه داد .

به این ترتیب به نظر می‌رسدکه بعدازمقاله ۱۹۲۲ لیندبرگ یاحداقل بعدازانتشارکتاب ۱۹۲۵ لوی جزدرموردظریف ترکردن کران مورد گفتگو مساله را می‌شدپایان یافته تلقی کرد. ازکتاب لوی روشن است که او اثبات لیندبرگ را ساده‌تروبهترازخوداو ،بااستفاده ازتوابع مشخصه به کاربرده است. بهرحال اوترجیحا "همین روش راکه بسادگی نتایج متعددی برای قوانین پایداری به دست می‌داد ،تازمانیکه موردانتقادبورل قرارگرفت ادامه‌داد. قابل توجه است که توابع مشخصه که زینت بخش کتاب ۱۹۲۵ لوی است درکارهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۵ اوجایی ندارند .

بهرحال مساله خاتمه نیافت ،زیراتمام قضایا فقط شرایط کافی رابرای تقریب توزیع گاوسی ارائه می‌دادند. ازمثالهای ارائه شده توسط پوآسون در ۱۸۲۴ می‌دانیم که تقریب گاوسی همواره برای مجموعهای متغیرهای

مستقل دلخواه برقرار نیست. شرح بررسی شرایط لازم وکافی منوط به گشودن فصل دیگری وتوضیح مسالهٔ حق تقدم بین فلر ولوی است.

۴. مساله حق تقدم

فلر در جلد دوم کتاب خود در ۱۹۷۱ میگوید:

حالتهای خاص وگوناگون این قضیه پیشتر شناخته شده بودند، اما لیندبرگ اولین صورت عمومی راکه شامل قضیهٔ ۱ است ارائه داد. ضرورت شرط لیندبرگ با نمونهٔ کلاسیک توسط فلر ثابت شده است .....

لوی درخاطرات خود (۱۹۷۰) میگوید:

"هرچندکه درهمان زمان فلر نتایج یکسانی رابه دست آورد ومنتشر ساخت، استقلال تحقیقات ما نمی‌توانست مورد تردید قرار گیرد وقرار هم نگرفت. بهرحال کار را وزودتر از کار من منتشر شده است واو شایستگی آن را دارد تا بیان واثبات قضیه راکه به مفهوم معینی یک صورت نهائی ازتوزیع گاوسی راعمومیت می‌بخشد، به او نسبت داد. با این وجود من متقاعد شده ام که هرچه را به دست

آورده‌ام بدون راهنمایی دیگران بوده است
مگر چند مورد که از پوآنکاره الهام گرفته‌ام. من
هرگز نخواسته‌ام از توزیع گاوسی نصیبی
داشته باشم."

همچنانکه خواهیم دید هم فلر و هم لوی فقط حالتی خاص را در سالهای ۱۹۳۴-۱۹۳۵ بررسی کرده‌اند یعنی حالت "مجموع هنجارشده" را. هر دو نویسنده پذیرفته بودند که، بنا بر اصطلاح لوئوه[۳۴]، جمعیده‌های فردی "بطور مجانبی ویکنواخت ناچیز" پذیرند یا بقول گندنکو[۳۵] و کولموگروف "بینهایت کوچک" اند. بعدا زیافتن قضیهٔ ۳ بوسیلهٔ کرامر (در ۱۹۳۶)، نقش، ناچیزی مجانبی، کاملا" آشکار شد. هم لوی و هم فلر از امکان اینکه مجموع چند متغیر مستقل می‌تواند توزیع تقریبا "گاوسی داشته باشد بدون اینکه هیچیک از آنها تقریبا "گاوسی باشد، با خبر بودند. اگرچه فلر در جایی (۱۹۳۵) مساله را بدلیل اینکه "متعلق به حساب احتمالات نیست" رها میکند. برای آنکه ببینیم چه کسی ابتدا چه انجام داده است، تقویم را ورق میزنیم:
مقالهٔ ۱۹۳۵ لوی در اکتبر ۱۹۳۴ نوشته شد. و در جلسهٔ ۲۸ نوامبر ۱۹۳۴ انجمن ریاضی فرانسه ارائه شد. مقاله در ۹ فوریه ۱۹۳۵ تایپ شد. دستور چاپ مجله در سپتامبر ۱۹۳۵ داده شد و این شمارهٔ مجله در دسامبر ۱۹۳۵ آماده فروش شد.
مقاله فلر در پنجم ماه مه ۱۹۳۵ به Mathematische Zeitschrift رسید.
این شماره از Zeitschrift در هشتم نوامبر ۱۹۳۵ کامل و برای چاپ آماده شد. تاریخ دقیق اینکه مجله در چه زمانی واقعا "توزیع شده است دانسته نیست بهرحال ممکن است سریع توزیع شده باشد.
فلر در مقالهٔ دوم خود دربارهٔ قضیهٔ حد مرکزی (۱۹۳۷) تا حدودی ادعای

لوی را برای حق تقدم داشتن قبول می‌کند. ترجمهٔ دقیق جملهٔ او از آلمانی مشکل است، ولی ترجمهٔ تقریبی گفتهٔ او چنین است:

> خوشحالم که، در پاسخ به نامهٔ آقای پ. لوی، درمورد مقاله‌اش توجه دهم که اگرچه دیرتر منتشر شد، اما قبل از من آن را به انجمن ریاضی فرانسه ارائه داده بود. (اکتبر ۱۹۳۴ در مقابل مه ۱۹۳۵).

اگرچه روشهای به کار گرفته شده توسط فلر و لوی بسیار متفاوت است اما می‌توان گفت که ارتباطات بین پاریس و استکهلم بدون تاثیر نبوده است در واقع مکاتبهٔ قابل توجهی بین فرانسه، سوئد و روسیه در موضوعات احتمال وجود داشته است. بهرحال فلر که همان موقع از کیل به استکهلم رفته بود، موضوع احتمال برایش تازه بود زیرا او قبلا" در نظریهٔ اندازه، هندسهٔ دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای و سایر موضوعات ریاضی کار کرده بود. وظاهرا "از کار لوی تنها توسط کتاب ۱۹۲۵ وی اطلاع یافته بود، جدا از کارهای خاص سالهای ۱۹۳۱ و ۱۹۳۴ لوی، به نظر می‌رسد که او از مقالهٔ ۱۹۲۶ برنشتاین نیز اطلاعی نداشته است.

L.Le Cam
The central limit theorem around 1935,
Statistical Science,1986,Vol.1,No.1,78-96.

توضیحـــــات :

1) Feller	2) Levy	3) Cramer
4) Laplace	5) Poisson	6) Lindeberg
7) Bernstein	8) Kolmogrov	9) Araujo
10) Gine	11) Pollard	12) Macys
13) Zactsev	14) Arak	15) Dudley
16) Philipp	17) Mavrey-Schwartz	
18) Ecole	19) Legendre	20) Berry
21) Esseen	22) Hausdorff	23) Bertrand
24) Poincare	25) Borol	26) Hadamard
27) Glaisher	28) Forbenius	29) Stigler
30) Czuber	31) martingale	32) Trotter
33) Lipschitz	34) Loeve	35) Gnedenko