

مدت آزمون: ۲ ساعت

۱۳۹۳/۱/۲۱

توجه: برگه های دفترچه‌ی پاسخ نامه را بترتیب شماره‌گذاری کرده و پاسخ هر پرسش را در برگه مخصوص خود بنویسید. بارم پرسش‌های ۱ و ۴ هر کدام ۸ و پرسش‌های ۲ و ۳ هر کدام ۱۲ نمره است.

۱. فرض کنید رویه‌ی S در فضا توسط معادله‌ی $(x - z) + \sin(y - z) = 1$ مشخص شده باشد. نشان دهید که کلیه‌ی صفحات مماس بر S بر صفحه به معادله‌ی $x + y + z = 0$ عمود هستند.

۲. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 2y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
ب) با استفاده از تعریف نشان دهید که f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است.

۳. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ، مطلوب است محاسبه‌ی مشتق سویی f در $(0, 0)$ در سوی \mathbf{u} ، یعنی $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$.

ج) مقدار $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u}$ را به دست آورید. از دو قسمت (ب) و (ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر و z تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد که بطور ضمنی در معادله‌ی $f(e^{(x+z)}, y+z) = 0$ صدق می‌کند. ثابت کنید

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$