به نام خالق مهربان

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۱

مدت آزمون: ۱۵۰ دقیقه — دی ماه ۱۳۹۱

---

۱. (۳۰ نمره) الف) نشان دهید مینیمم مطلق تابع $f(x) = 3x^{\ln x}$ بر بازه $(0,\infty)$ برابر ۳ است.

ب) تابع $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $F(x)=\int_1^x 3t^{\ln t}\,dt$ مفروض است. نشان دهید معادله‌ی $F(x)-x=0$ حداکثر یک جواب دارد.

۲. (۲۰ نمره) مطلوب است محاسبه‌ی حد زیر:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\displaystyle\int_0^{\ln x}\frac{dt}{e^t-t}}{\sinh(x-1)}$$

۳. (۳۰ نمره) انتگرال‌های زیر را حساب کنید

الف) $\displaystyle\int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

ب) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{2x}+1}$

۴. (۲۵ نمره) همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره‌ی $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$ را بررسی کنید.

۵. (۲۵ نمره) بسط مک‌لورن (بسط تیلور حول نقطه صفر) تابع $f(x)=\ln(1+x)$ را تعیین و بازه‌ی همگرایی سری توان حاصل را به دست آورید.

موفق باشید

پاسخ سوال یک

الف)

با توجه به اینکه $f(x)=3x^{\ln x}=3e^{(\ln x)^2}$ (۲ نمره)

بنابراین $f'(x)=6\frac{\ln x}{x}e^{(\ln x)^2}$ (۲ نمره)

(۲ نمره) در نتیجه $f'(x)=0$ معادل است با $\ln x=0$ که چون

(۲ نمره) ln تابعی یک به یک است پس دارای جواب منحصر بفرد $x=1$ است

(۱۵ نمره) (۱ نمره) از طرفی چون تابع f روی $(0,\infty)$ مشتق پذیر است پس تنها نقطه بحرانی $f(x)$ نقطه $x=1$ است.

(۳ نمره) همچنین چون برای $x\in(0,1)$ ، $\ln x<0$ پس $f'(x)<0$ و نیز چون برای $x\in(1,\infty)$ ، $\ln x>0$ پس $f'(x)>0$ پس طبق آزمون مشتق اول برای اکسترمم، $x=1$ یک نقطه مینیمم برای تابع $f(x)$ است

(۲ نمره) و $f(1)=3$ مقدار مینیمم برای این تابع است.

ب) هرگاه قرار دهیم $h(x)=F(x)-x$ (۲ نمره). از آنجا که

$$h'(x)=F'(x)-1 \underset{\text{طبق قضیه اساسی حساب}}{\overset{(۴\ \text{نمره})}{=}} 3x^{\ln x}-1=f(x)-1$$

(۴ نمره) و بنابر قسمت الف در بازه $(0,\infty)$ ، $x=1$ نقطه مینیمم است پس

$$h'(x)=f(x)-1\geq f(1)-1=3-1=2>0$$

(۱۵ نمره) (۵ نمره) یعنی برای $x\in(0,\infty)$ ، $h'(x)\neq 0$. پس از قضیه رل نتیجه شود که $h(x)=0$ نمی‌تواند دو جواب داشته باشد [در غیر اینصورت در نقطه ای بین دو جواب $h'(x)=0$ خواهد بود]. پس $F(x)-x=0$ حداکثر یک جواب دارد.

پاسخ سوال ۲

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}}{\sinh(x-1)} = \frac{0}{0}$$

چون هر دو توابع صورت و مخرج مشتق پذیرند و $\cosh(x-1) \neq 0$ ، بنابر

قاعده هوپیتال داریم (۳ نمره)

$$\left(\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}\right)' = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x - \ln x} \quad (\text{۱۰ نمره})$$

$$\left(\sinh(x-1)\right)' = \cosh(x-1) \quad (\text{۵ نمره})$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_0^{\ln x} \frac{dt}{e^t - t}}{\sinh(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x - \ln x}}{\cosh(x-1)} = 1 \quad (\text{۲ نمره})$$

جواب سؤال ۳.

الف) $\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (۱۵ نمره)

راه اول: $u := \sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. بنابراین

$$\int \frac{x\sin^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (\sin u)\,u\,du$$

از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم. $u := u$ ، $dv := \sin u\,du$. پس انتگرال بالا برابر است با

$$-u\cos u + \int \cos u\,du = -u\cos u + \sin u + C = -\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} + x + C$$

راه دوم: $\begin{cases} x = \sin u \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow dx = \cos u\,du$ ، $\sqrt{1-x^2} = \cos u$

و بنابراین

$$\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{u\sin u}{\cos u}\cos u\,du = \int u\sin u\,du$$

$$= -u\cos u + \int \cos u = -u\cos u + \sin u + C = -\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2} + x + C$$

ب) (۱۸ نمره)

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{3x}+e^x}$$

با تغییر متغیر $u := e^x$ خواهیم داشت

$$= \int \frac{du}{u^3+u} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{u\,du}{u^2+1} = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C$$

!تجزیه کسر!

$$= \ln e^x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

پاسخ سوال ۴

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}\,dx$$

همگرایی دو انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}\,dx$ و $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}\,dx$ را بررسی می‌کنیم ۱ نمره

الف) انتگرال ناسره $\int_0^1 \frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$f(x)=\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

توابع f و g به ازای هر $1 \geq x > 0$ بر $[c,1]$ انتگرال‌پذیر هستند

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+} e^{-x^4}=1$$

بنابر آزمون مقایسه حدی

$\int_0^1 f(x)\,dx$ همگراست اگر و تنها اگر $\int_0^1 g(x)\,dx$ همگرا است

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{c\to 0^+}\int_c^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{c\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_c^1=2$$ این انتگرال همگراست

در نتیجه $\int_0^1 f(x)\,dx$ نیز همگراست ۱ نمره

ب) انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\forall x \geq 1 \quad \begin{cases} \sqrt{x}\geq 1 \Rightarrow 0<\frac{1}{\sqrt{x}}\leq 1 \\ x^4 \geq x \Rightarrow -x^4 \leq -x \Rightarrow 0<e^{-x^4}\leq e^{-x} \end{cases} \Rightarrow 0<\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}\leq e^{-x}$$

به ازای هر $c>1$، $f(x)=\frac{e^{-x^4}}{\sqrt{x}}$ و $h(x)=e^{-x}$ بر $[1,c]$ انتگرال‌پذیر هستند

$$\int_1^{+\infty}h(x)\,dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^c e^{-x}\,dx=\lim_{c\to+\infty} -e^{-x}\Big|_1^c=\frac{1}{e}$$

انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ همگراست بنابر آزمون مقایسه، انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز همگراست ۱ نمره

با توجه به همگرایی هر دو انتگرال ناسره، انتگرال I نیز همگراست

پاسخ سوال ۵.

روش اول) $\quad f(x) = \ln(1+x) = \int \dfrac{dx}{1+x}$ $\quad$ (۵ نمره)

$\forall x \quad |x|<1 \quad \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ می دانیم که $\quad$ (۵ نمره)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-x)^n \, dx$$ (۵ نمره)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall x \quad |x|<1$$ (۵ نمره)

شعاع همگرائی $= 1$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$$ سری همساز $\Rightarrow$ واگراست

(۲٫۵ نمره)

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow[\text{لایب نیتز}]{\text{آزمون}}$$ سری همگراست $\quad$ (۲٫۵ نمره)

بازه همگرائی $= (-1, 1]$

روش دوم)

(۳ نمره) $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0 \qquad , \; f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1 \qquad \xRightarrow{\text{استقرا}} \; f^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \dfrac{(n-1)!}{(1+0)^n}$

(۱۵ نمره)

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$ (۵ نمره)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$$ (۲ نمره)

$\Rightarrow \quad \forall x \quad |x| < 1$ سری همگرای مطلق

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ همگرا (۲٫۵ نمره)

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ واگرا (۲٫۵ نمره)

$(-1, 1] =$ بازه همگرایی